# Lógica

## Resolución Básica


Damiano Zanardini

Graduado/a en Ingeniería Informática
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid
damiano@fi.upm.es


Curso Académico 2010/2011

# Introducción

## Idea general

- hemos visto que, para demostrar que un conjunto de cláusulas es insatisfacible, sólo hay que encontrar un conjunto finito e insatisfacible $S$ de instancias básicas de las cláusulas
- en la práctica, buscamos un método para
  - generar instancias básicas de las cláusulas
  - demostrar su insatisfacibilidad

☞ la que se usa para generar $S$ y la técnica que se usa para decidir si $SAT(S)$ son independientes

# Introducción (paréntesis)

## Dónde estamos y a dónde vamos...

- en el campo de la *lógica proposicional* (no hay variables)
- decidir la satisfacibilidad de una fórmula proposicional es el problema SAT, extremadamente importante en informática
  - verificación de circuitos y procesadores
  - horarios, planificación, calendarios, optmización...
  - propiedades de programas (p. ej. la terminación o la corrección de algunas operaciones)
- por eso hasta ahora ha habido tanta investigación en los algoritmos para resolver SAT:
  - porque tiene muchísimas aplicaciones $\rightsquigarrow$ `http://www.satlive.org`
  - y también por la $\mathcal{NP}$-completitud

# De vuelta a la introducción

## El primer componente: Saturación por niveles

- generar incrementalmente conjuntos $S_i$ de instancias básicas según los *niveles* $H_0, H_1, .., H_k, ..$ del universo de Herbrand
  - en el paso $i$, todas las instancias básicas que se obtienen con $H_0 \cup .. \cup H_i$
- para un conjunto $S_i$, tratar de encontrar una *contradicción*, es decir, demostrar que es insatisfacible
- si no se puede hallar una contradicción, hay que generar más instancias (con el siguiente nivel del universo de Herbrand) y repetir
- si no hay más instancias, entonces el conjunto es satisfacible
- el punto es que
  - si es insatisfacible entonces tarde o temprano lo demostramos
  - si no lo es entonces puede ser que nunca lo sepamos

# De vuelta a la introducción

**Usar la saturación por niveles: para un conjunto $\mathcal{C}$ de cláusulas**

$i = 0$;
$S = \emptyset$;
**mientras** $(SAT(S))$
  $H_i =$ el nivel $i$ de $H(\mathcal{C})$
  $X = \{C' \mid C \in \mathcal{C}$ y $C'$ se obtiene de $C$
    reemplazando todas las variables con términos de $H_i\}$;
  $S = S \cup X$;
  $i = i + 1$;

## Hacia el segundo componente

- saturación por niveles para generar instancias básicas
- un método para decir la satisfacibilidad: resolución básica

$$\begin{tikzcd} \text{primer orden} & \mathcal{C} \arrow[d, "\textit{saturación}"'] \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, dotted] \arrow[drrr, dotted] & & & \\ \text{básico} & SAT(S) & SAT(S) & SAT(S) & SAT(S) \end{tikzcd}$$

# El método de Resolución de Robinson

## Idea general

Obtener nuevas instancias deducidas del conjunto original $\mathcal{C}$, de forma que $\mathcal{C}$ es insatisfacible si se pueden deducir un literal y también su negación

## Regla de la resolución básica

Dadas dos instancias $L \vee C_1$ y $\neg L \vee C_2$, donde $L$ es un literal, se puede deducir una nueva instancia $C_1 \vee C_2$ que se llama el *resolvente*

## Insatisfacibilidad

Aplicando la regla se puede derivar una contradicción si el conjunto original es insatisfacible: dicha contradicción viene de la aplicación de la resolución a $L$ y $\neg L$, que genera la cláusula vacía $\square$

# El método de Resolución de Robinson

## Nota: Idempotencia

Para asegurarnos de deducir la contradicción *siempre que* el conjunto sea insatisfacible, hay que considerar la *idempotencia* $L \vee L \leftrightarrow L$

$$\begin{array}{ccc} L \vee L & & \neg L \vee \neg L \\ & L \vee \neg L & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} L & & \neg L \\ & \square & \end{array}$$

## Resolución extendida

Dadas dos instancias $L \vee .. \vee L \vee C_1$ y $\neg L \vee .. \vee \neg L \vee C_2$, se puede deducir un resolvente $C_1 \vee C_2$

- La aplicación de esta regla extendida se llama *paso de resolución sobre $L$ con resolvente* $C_1 \vee C_2$

# El método de Resolución de Robinson

## Método: dado un conjunto $S$ de instancias básicas

$X = S$
**repite**
  generar con pasos de resolución todos los resolventes posibles
    para los elementos de $X$: sea este conjunto $R(X)$
  **si** $(\Box \in R(X))$ **entonces STOP**: $INSAT(S)$
  **si** $(R(X) \sqsubseteq X)$ **entonces STOP**:
    se han generado ya todos los resolventes posibles, y por lo tanto $SAT(S)$
  $X = R(X) \cup X$

## Teorema (Res)

*Un conjunto $S$ de instancias básicas es insatisfacible sii $\Box$ se puede deducir de él por resolución*

# El método de Resolución de Robinson

## Método general

- generar todos los conjuntos posibles de instancias básicas
- para cada conjunto aplicar la resolución básica
- el primer paso es muy ineficiente
  - "El mayor problema de la saturación por niveles es el ritmo al que crecen, al crecer $i$, los conjuntos $H_i$ y $HB_i$, y, por lo tanto, $S_i$" (Robinson, 1965, no literal)

# El método de Resolución de Robinson

## Ejemplo (Robinson, 1963)

arises from seeking to prove the existence of a right identity element in any algebra closed under a binary associative operation having left and right solutions $x$ and $y$ for all equations $x{\cdot}a = b$ and $a{\cdot}y = b$ whose coefficient $a$ and $b$ are in the algebra

$$\mathcal{C} = \{ \begin{array}{c} \neg p(x,y,u) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(x,v,w) \vee p(u,z,w), \\ \neg p(x,y,u) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(u,z,w) \vee p(x,v,w), \\ p(g(x,y),x,y), \\ p(x,h(x,y),y), \\ p(x,y,f(x,y)), \\ \neg p(k(x),x,k(x)) \end{array} \}$$

## Ejemplo (Robinson, 1963)

- para probar la insatisfacibilidad sólo se necesitan cuatro términos básicos (el *conjunto de prueba* $T$):

$$T = \{\ a,\ h(a,a),\ k(h(a,a)),\ g(a,k(h(a,a)))\ \}$$

- pero para obtener $T$ hay que generar muchos (19765) términos

# El método de Resolución de Robinson

## Ejemplo (Robinson, 1963)

- además se necesita sólo una pequeña parte de las instancias de $\mathcal{C}$ sobre $T$ para obtener un $S$ insatisfacible

$$
\begin{array}{lc}
\{ & p(a, h(a, a), a), \\
 & \neg p(k(h(a, a)), h(a, a), k(h(a, a))), \\
 & p(g(a, k(h(a, a))), a, k(h(a, a))), \\
 & \neg p(g(a, k(h(a, a))), a, k(h(a, a))) \vee \neg p(a, h(a, a), a) \vee \\
 & \vee \neg p(g(a, k(h(a, a))), a, k(h(a, a))) \vee p(k(h(a, a)), h(a, a), k(h(a, a))) \quad \}
\end{array}
$$

# El método de Resolución de Robinson

## Idea de Robinson para mejorar la eficiencia

retrasar la sostitución de una variable con un término del universo de Herbrand a cuando sea necesario en un dado paso de resolución

- trabajar con cláusulas con variables
- cada resolvente (con variables) representa el conjunto de instancias básicas que se hubieran podido obtener aplicando la resolución básica